M1VOA/M1ST **22/05/2025** **Durée: 1 H 30 M**

MEF

Resolution Examen

Département Génie Civil

Questions de cours (05 Pts)

1. Citez les différents types d'éléments finis ? **(1.5 Pts)**

R :

Éléments 1D : barre, ressort.

Éléments 2D : triangles ou quadrilatères (pour contraintes planes, membranes).

Éléments 3D : tétraèdres, hexaèdres.

Éléments poutres/plaques/coques : pour modéliser des structures minces.

2. Expliquez les étapes nécessaires pour un calcul en EF ? **(1.5 Pts)**

R :

- **Discrétisation du domaine** : division en éléments finis.
- **Choix des fonctions d'interpolation** : pour approximer le champ de déplacement.
- **Formulation des équations élémentaires** : via principe de virtualité ou énergie potentielle.
- **Assemblage de la matrice de rigidité globale**.
- **Application des conditions aux limites** (déplacements imposés, forces).
- **Résolution du système d'équations**.
- **Post-traitement des résultats** (déplacements, efforts, contraintes).

3. Pourquoi utiliser la méthode des éléments finis alors qu'il existe des solutions analytiques ? **(1 Pts)**

R :

La MEF permet de résoudre numériquement des problèmes complexes en ingénierie pour lesquels les solutions analytiques n'existent pas, notamment en géométries complexes, matériaux non linéaires ou conditions aux limites variées

4. Quelles sont les équations fondamentales qu'un solide élastique doit satisfaire sous l'action de forces. **(1 Pts)**

R :

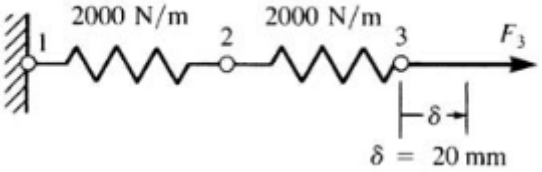
Equation de compatibilité : $\bar{\bar{\varepsilon}} = grad(\vec{u})$

Equation d'équilibre : $div\sigma + \rho f = 0$

Equations de comportement : $\sigma = A\varepsilon$

Exercice 01 (03 Pts)

Le système illustré est constitué de deux ressorts linéaires en série, de rigidité k1 =k2 = 2kn/m. Le déplacement total imposé dans le point 3 est δ=20 mm=0,02 m.
Déterminer la **force exercée F3** dans le point 3.



MEF

Resolution Examen

Département Génie Civil

R :

$$[k^{(1)}] = \begin{bmatrix} 2000 & -2000 \\ -2000 & 2000 \end{bmatrix}; \quad [k^{(2)}] = \begin{bmatrix} 2000 & -2000 \\ -2000 & 2000 \end{bmatrix}$$

$$\{F\} = [K]\{d\}$$

$$\begin{Bmatrix} F_{1x} = ? \\ F_{2x} = 0 \\ F_{3x} = ? \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 2000 & -2000 & 0 \\ -2000 & 4000 & -2000 \\ 0 & -2000 & 2000 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 = 0 \\ u_2 = ? \\ u_3 = 0.02\ \text{m} \end{bmatrix}$$

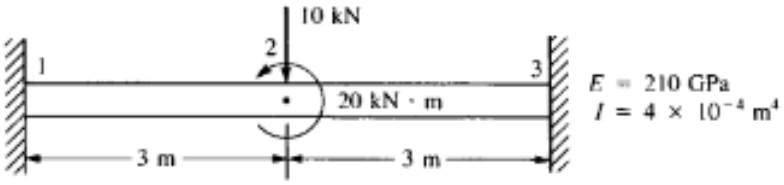
$$\Rightarrow \quad u_2 = 0.01\ \text{m}$$

Reactions

$$F_{1x} = (-2000)(0.01) \Rightarrow F_{1x} = -20\ \text{N}$$

Exercice 02 (12 Pts)

- Soit le système suivant, calculer :



1. La matrice de rigidité globale du système. **(04 Pts)**

2. Les déplacements, et forces réactionnelles pour chaque nœud. **(08 Pts)**

R :

$$[k_{1-2}] = \frac{EI}{L^3}\begin{bmatrix} 12 & 6L & -12 & 6L \\ & 4L^2 & -6L & 2L^2 \\ & & 12 & -6L \\ \text{Symmetry} & & & 4L^2 \end{bmatrix}$$

$$k_e = 3.111 \times 10^6 \cdot \begin{bmatrix} 12 & 18 & -12 & 18 \\ 18 & 36 & -18 & 18 \\ -12 & -18 & 12 & -18 \\ 18 & 18 & -18 & 36 \end{bmatrix}$$

$$[k_{2-3}] = \frac{EI}{L^3}\begin{bmatrix} 12 & 6L & -12 & 6L \\ & 4L^2 & -6L & 2L^2 \\ & & 12 & -6L \\ \text{Symmetry} & & & 4L^2 \end{bmatrix}$$

$$K = \begin{bmatrix} 3.73 \times 10^7 & 5.60 \times 10^7 & -3.73 \times 10^7 & 5.60 \times 10^7 & 0 & 0 \\ 5.60 \times 10^7 & 1.12 \times 10^8 & -5.60 \times 10^7 & 5.60 \times 10^7 & 0 & 0 \\ -3.73 \times 10^7 & -5.60 \times 10^7 & 7.47 \times 10^7 & 0 & -3.73 \times 10^7 & 5.60 \times 10^7 \\ 5.60 \times 10^7 & 5.60 \times 10^7 & 0 & 2.24 \times 10^8 & -5.60 \times 10^7 & 5.60 \times 10^7 \\ 0 & 0 & -3.73 \times 10^7 & -5.60 \times 10^7 & 3.73 \times 10^7 & -5.60 \times 10^7 \\ 0 & 0 & 5.60 \times 10^7 & 5.60 \times 10^7 & -5.60 \times 10^7 & 1.12 \times 10^8 \end{bmatrix}$$

MEF

Resolution Examen

Département Génie Civil

$$v_1 = \phi_1 = v_3 = \phi_3 = 0$$

$$[K] = \frac{EI}{L^3}\begin{bmatrix} 24 & 0 \\ 0 & 8L^2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} F_{2y} = -1000\ \text{N} \\ M_2 = 20000\ \text{N·m} \end{Bmatrix} = \frac{(210\times10^9)(4\times10^{-4})}{(3)^3}\begin{bmatrix} 24 & 0 \\ 0 & 8L^2 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} v_2 \\ \phi_2 \end{Bmatrix}$$

$$-0.0032142 = 24\ v_2 \Rightarrow v_2 = -1.34\times10^{-4}\ \text{m}$$

$$0.0064285 = 72\ \phi_2 \Rightarrow \phi_2 = 8.93\times10^{-5}\ \text{rad}$$

$$\begin{Bmatrix} F_{1y} \\ M_1 \\ F_{2y} \\ M_2 \\ F_{3y} \\ M_3 \end{Bmatrix} = \frac{(210\times10^9)(4\times10^{-4})}{3}\begin{bmatrix} 12 & 6L & -12 & 6L & 0 & 0 \\ 6L & 4L^2 & -6L & 2L^2 & 0 & 0 \\ -12 & -6L & 24 & 0 & -12 & 6L \\ 6L & 2L^2 & 0 & 8L^2 & -6L & 2L^2 \\ 0 & 0 & -12 & -6L & 12 & -6L \\ 0 & 0 & 6L & 2L^2 & -6L & 4L^2 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1.34\times10^{-4} \\ 8.93\times10^{-5} \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$\Rightarrow F_{1y} = 3.1\times10^6\,(-12\,(1.34\times10^{-4}) + 6(3)\,(8.93\times10^{-5})) \Rightarrow F_{1y} = 10000\ \text{N}$

$M_1 = 3.1\times10^6\,(-6(3)\,(1.34\times10^{-4}) + 2(3)^2\,(8.93\times10^{-5})) \Rightarrow M_1 = 12500\ \text{N·m}$

Similarly

$F_{2y} = -10000\ \text{N}$

$M_2 = 20000\ \text{N·m}$

$F_{3y} = 1.87\ \text{N}$

$M_3 = -2500\ \text{N·m}$

Element 1–2

$$\begin{Bmatrix} f_{1y} \\ m_1 \\ f_{2y} \\ m_2 \end{Bmatrix} = \frac{(210\times10^9)(4\times10^{-4})}{(3)^3}\begin{bmatrix} 12 & 6L & -12 & 6L \\ 6L & 4L^2 & -6L & 2L^2 \\ -12 & -6L & 12 & -6L \\ 6L & 2L^2 & -6L & 4L^2 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1.34\times10^{-4} \\ 8.93\times10^{-5} \end{Bmatrix}$$

$\Rightarrow f_{1y} = 10000\ \text{N}$

$m_1 = 12500\ \text{N·m}$

$f_{2y} = -10000\ \text{N}$

$m_2 = 17500\ \text{N·m}$

Element 2–3

$$\begin{Bmatrix} f_{2y} \\ m_2 \\ f_{3y} \\ m_3 \end{Bmatrix} = \frac{(210\times10^9)(4\times10^{-4})}{(3)^3}\begin{bmatrix} 12 & 6L & -12 & 6L \\ 6L & 4L^2 & -6L & 2L^2 \\ -12 & -6L & 12 & -6L \\ 6L & 2L^2 & -6L & 4L^2 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} -1.34\times10^{-4} \\ 8.93\times10^{-5} \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$\Rightarrow f_{2y} = -1.87\ \text{N}$

$m_2 = 2500\ \text{N·m}$

$f_{3y} = 1.87\ \text{N}$

$m_3 = -2500\ \text{N·m}$

Bon courage