Ministère de l'Ens. Supér. et de la Rech. Scient.
Université Abbes Laghrour – Khenchela
Faculté des Sciences et Technologies
Département de Science de la Matière
$2^{ème}$ Année Physique
Année Universitaire: 2024/2025

Corrigé d'Examen Final
– Mécanique Quantique I –
(26 Mai 2025)

Problème: *(12 points)*

1. Le champ électromagnétique dans une cavité fermée est-ils équivalent à un ensemble dénombrable d'oscillateurs harmoniques linéaires et indépendants?

$$\phi.E.M \overset{?}{\Leftrightarrow} \sum_i O.H.L.$$

$$Q(t) = \int_P \rho(x,t)\, d^3x, \qquad \square \quad 0.25\,pt$$

$$i = \int_s (\vec{j}, \vec{n}) ds = -\frac{dQ}{dt}, \qquad \square \quad 0.25\,pt$$

$$\rho = 0, \quad \vec{j} = \vec{0}. \qquad \square \quad 0.50\,pt$$

$$\Delta\vec{A} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\vec{A}}{\partial t^2} = \vec{0}, \quad \Delta\varphi - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} = 0, \qquad \square \quad 0.50\,pt$$

$$\vec{\nabla}.\vec{A} = 0, \qquad \square \quad 0.25\,pt$$

$$\vec{E} = -\frac{\partial\vec{A}}{\partial t}, \quad \vec{B} = \frac{1}{\mu^2}\vec{\nabla} \wedge \vec{A}. \qquad \square \quad 0.50\,pt$$

Le potentiel vecteur est

$$\begin{aligned} A(x,y,z,t) &= A(x+a,y,z,t) \\ &= A(x,y+a,z,t) \\ &= A(x,y,z+a,t). \end{aligned} \qquad \square \quad 0.75\,pt$$

$$\vec{A}(\vec{r},t) = \sum_{\vec{k}} \left[\vec{A}_{1,\vec{k}}(t)\cos(k,r) + \vec{A}_{2,\vec{k}}(t)\sin(k,r)\right], \qquad \square \quad 0.50\,pt$$

$$\vec{A}(\vec{r},t) = \sum_{\vec{k}} \left[\vec{q}(\vec{k},t)e^{i\vec{k}.\vec{r}} + \vec{q}^*(\vec{k},t)e^{-i\vec{k}.\vec{r}}\right], \qquad \square \quad 0.50\,pt$$

avec

$$\vec{q}(\vec{k},t) = \frac{\vec{A}_1(\vec{k},t) - i\vec{A}_2(\vec{k},t)}{2}. \qquad \square \quad 0.25\,pt$$

Sachant que

$$\vec{q}^*(\vec{k},t) = \vec{q}^*(-\vec{k},t), \qquad \square \quad 0.25\,pt$$

où

$$\vec{k} = \frac{2\pi}{a}\vec{n}, \quad n_i \geqslant 0. \qquad \square \quad 0.25\,pt$$

$$\vec{A}(r,t) = \sum_{\vec{n}} \left[\vec{q}(\vec{k},t)e^{\frac{2\pi i}{a}\vec{n}.\vec{r}} + \vec{q}^*(\vec{k},t)e^{-\frac{2\pi i}{a}\vec{n}.\vec{r}}\right]. \qquad \square \quad 0.50\,pt$$

On reécrivant l'équation précedente sous une forme compacte

$$\vec{q}(\vec{k},t) = \frac{1}{2V}\int \vec{A}(r,t)e^{-i\vec{k}.\vec{r}}d\vec{r}, \qquad \square \quad 0.25\,pt$$

$$\begin{aligned} \vec{\nabla}\vec{A}(\vec{r},t) &= \sum_{\vec{k}} \left[i\vec{k}.\vec{q}(\vec{k},t)e^{i\vec{k}.\vec{r}} - i\vec{k}.\vec{q}^*(\vec{k},t)e^{-i\vec{k}.\vec{r}}\right]. \\ &= 0 \end{aligned} \qquad \square \quad 0.50\,pt$$

$$\vec{k}.\vec{q}(\vec{k},t) = 0, \quad \vec{k}.\vec{q}^*(\vec{k},t) = 0. \qquad \square \quad 0.50\,pt$$

$$\Delta\vec{A} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\vec{A}}{\partial t^2} = \vec{0}. \qquad \square \quad 0.25\,pt$$

$$\vec{A}(\vec{r},t) = \sum_{\vec{k},\sigma} \left[\vec{q}_\sigma(\vec{k},t)e^{i\vec{k}.\vec{r}} + \vec{q}^*_\sigma(\vec{k},t)e^{-i\vec{k}.\vec{r}}\right], \qquad \square \quad 0.50\,pt$$

$$\vec{k} = \frac{2\pi}{a}\vec{n}, \quad \vec{k}.\vec{q} = 0, \quad \vec{q}(\sigma,\vec{k},t) = \vec{q}^*(\sigma,-\vec{k},t), \qquad \square \quad 0.75\,pt$$

$$\sum_{\vec{k}} \left[k^2(\vec{q}e^{i\vec{k}.\vec{r}} + \vec{q}^*e^{-i\vec{k}.\vec{r}}) + \frac{1}{c^2}(\ddot{\vec{q}}e^{i\vec{k}.\vec{r}} + \ddot{\vec{q}}^*e^{-i\vec{k}.\vec{r}})\right] = 0. \qquad \square \quad 0.50\,pt$$

$$\vec{q}(\sigma,\vec{k},t).\vec{q}(\sigma',\vec{k},t) = \vec{q}(\sigma,\vec{k},t).\vec{q}^*(\sigma',\vec{k}',t) = 0, \qquad \square \quad 0.50\,pt$$

$$-\sum_{\vec{k},\sigma} \left[(\ddot{\vec{q}} + \omega^2\vec{q})e^{i\vec{k}.\vec{r}} + \text{conj}\right] = 0, \quad \omega^2 = c^2k^2. \qquad \square \quad 0.50\,pt$$

Finalement on retrouve une équation diffirentiel de deuxième ordre qui une équation d'un Oscillateur Harmonique

$$\ddot{\vec{q}} + c^2k^2\vec{q} = 0. \qquad \square \quad 0.25\,pt$$

2. La densité d'énergie rayonnée par un corps noir connue sous le nom de loi de Planck est :

$$U(T,\nu) = \frac{8\pi h}{c^3}\frac{\nu^3}{e^{\frac{h\nu}{k_B T}}-1}. \qquad \square\ 0.25\,pt$$

Exercice: *(08 points)*

1. Si $A = A^+$ et $B = B^+$ donc

$$\begin{aligned}(AB)^+ &= B^+A^+ && \square\ 0.25\,pt\\ &= BA, && \square\ 0.25\,pt\end{aligned}$$

et comme $[A,B]=0$ ç.à.d. $AB = BA$ on à

$$(AB)^+ = AB. \qquad \square\ 0.25\,pt$$

2. Preuve

$$\begin{aligned}\left\langle A^+\varphi|\psi\right\rangle &= \langle\varphi|\left(A^+\right)^+|\psi\rangle && \square\ 0.25\,pt\\ &= \langle\varphi|A|\psi\rangle && \square\ 0.25\,pt\\ &= \langle\varphi|A\psi\rangle. && \square\ 0.25\,pt\end{aligned}$$

3. Nous avons $\langle\psi|A^+|\varphi\rangle = \langle\varphi|A|\psi\rangle^*$ donc:

$$\begin{aligned}&\langle u|(|\varphi\rangle\langle\psi|)^+|v\rangle\\ =\ &[\langle v|(|\varphi\rangle\langle\psi|)|u\rangle]^* && \square\ 0.25\,pt\\ =\ &\langle v|\varphi\rangle^*\langle\psi|u\rangle^* && \square\ 0.25\,pt\\ =\ &\langle\varphi|v\rangle\langle u|\psi\rangle && \square\ 0.25\,pt\\ =\ &\langle u|\psi\rangle\langle\varphi|v\rangle, && \square\ 0.25\,pt\end{aligned}$$

$\forall|u\rangle$ et $|v\rangle$. Il vient

$$(|\varphi\rangle\langle\psi|)^+ = |\psi\rangle\langle\varphi|. \qquad \square\ 0.25\,pt$$

4. Le conjugué de l'opérateur

$$\begin{aligned}&\left(\lambda\langle\varphi'|A|\psi'\rangle|\varphi\rangle\langle\psi|\right)^+\\ =\ &(|\varphi\rangle\langle\psi|)^+\left(\langle\varphi'|A|\psi'\rangle\right)^*\lambda^* && \square\ 0.25\,pt\\ =\ &\lambda^*\langle\psi'|A^+|\varphi'\rangle|\psi\rangle\langle\varphi|. && \square\ 0.25\,pt\end{aligned}$$

5. Soit P_x opérateur de projection de l'opérateur x, l'élement de matrice $\langle\varphi|P_x|\psi\rangle$ dans la représentation $\{|\vec{r}\rangle\}$:

$$\begin{aligned}\langle\varphi|P_x|\psi\rangle &= \langle\varphi|1P_x|\psi\rangle && \square\ 0.25\,pt\\ &= \int d\vec{r}\,\langle\varphi|\vec{r}\rangle\langle\vec{r}|P_x|\psi\rangle && \square\ 0.25\,pt\\ &= \int d\vec{r}\,\langle\varphi|\vec{r}\rangle\frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial x}\langle\vec{r}|\psi\rangle, && \square\ 0.25\,pt\end{aligned}$$

sachant que

$$\int d\vec{r}\,|\vec{r}\rangle\langle\vec{r}| = 1, \qquad \square\ 0.50\,pt$$

$$\langle\varphi|\vec{r}\rangle = \varphi^*(\vec{r}), \quad \langle\vec{r}|\psi\rangle = \psi(\vec{r}), \qquad \square\ 0.50\,pt$$

soit

$$\langle\varphi|P_x|\psi\rangle = \int d\vec{r}\varphi^*(\vec{r})\frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial x}\psi(\vec{r}). \qquad \square\ 0.25\,pt$$

L'élement de matrice $\langle\varphi|P_x|\psi\rangle$ dans la représentation $\{|\vec{p}\rangle\}$:

$$\begin{aligned}\langle\varphi|P_x|\psi\rangle &= \langle\varphi|1P_x|\psi\rangle && \square\ 0.25\,pt\\ &= \int d\vec{p}\,\langle\varphi|\vec{p}\rangle\langle\vec{p}|P_x|\psi\rangle && \square\ 0.25\,pt\\ &= \int d\vec{p}\,\langle\varphi|\vec{p}\rangle\,p_x\langle\vec{p}|\psi\rangle, && \square\ 0.25\,pt\end{aligned}$$

sachant que

$$\int d\vec{p}\,|\vec{p}\rangle\langle\vec{p}| = 1, \qquad \square\ 0.50\,pt$$

$$\langle\varphi|\vec{p}\rangle = \bar{\varphi}^*(\vec{p}), \quad \langle\vec{p}|\psi\rangle = \bar{\psi}(\vec{p}), \qquad \square\ 0.50\,pt$$

soit

$$\langle\varphi|P_x|\psi\rangle = \int d\vec{p}\bar{\varphi}^*(\vec{p})\,p_x\bar{\psi}(\vec{p}). \qquad \square\ 0.25\,pt$$

6.

$$\begin{aligned}&[A,BCD]\\ =\ &[A,B]\,CD + B\,[A,CD] && \square\ 0.25\,pt\\ =\ &[A,B]\,CD + B\,([A,C]\,D + C\,[A,D]) && \square\ 0.25\,pt\\ =\ &[A,B]\,CD + B\,[A,C]\,D + BC\,[A,D]. && \square\ 0.25\,pt\end{aligned}$$

– Fin –

Ens. A. Saadane