Examen final : Electromagnétisme

Exercice 1 (5pts)

Soit $A = 2xyz\vec{i} + (2x^2 - y)\vec{j} - yz^2\vec{k}$ et $\phi = x^2y + 2y^2z^3$

- Donner au point (1,0,0): $\overrightarrow{grad}\ \phi,\ divA,\ \overrightarrow{Rot}A$

Exercice 2 (7pts)

On considère une distribution de charges qui crée en tout point M de l'espace un potentiel

$$V(r) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{e^{-\frac{r}{a}}}{r}$$

1) Calculer le champ électrique $E(r)$ et son flux $\boldsymbol{\phi}$ à travers une sphère de rayon r.
2) En déduire, par application de la forme intégrale du théorème de Gauss, la charge totale Q contenue dans cette sphère.
3) Quelle est sa valeur pour r très petit et r très grand ?

NB : $\boldsymbol{\phi = \int \vec{E}\overrightarrow{ds} = \frac{Q}{\varepsilon_0}}$

Exercice 3 (8 pts)

On étudie une onde électromagnétique dont le champ électrique est :

$$\vec{E} = E_x\overrightarrow{u_x} + E_y\overrightarrow{u_y}$$

Avec $E = E_0 e^{\left[i\left(\frac{k}{3}(2x+2y+z)-\omega t\right)\right]}$

L'onde se propage dans le vide et sa longueur d'onde est $\lambda = 6 \times 10^{-7}m$.

a- Calculer la fréquence de l'onde.

b- Dans quel domaine du spectre électromagnétique se situe cette onde ?

c- Calculer la valeur numérique de la constante k.

d- Etablir l'équation cartésienne d'un plan d'onde.

e- Exprimer E_y en fonction de E_x.

f- Calculer le champ magnétique $\vec{B}$

Think Twice!

Corrigé

Exercice 1 (5pts)

- Le gradient :

$$\overrightarrow{grad}\,\phi(x,y,z) = \vec{\nabla}\,\phi(x,y,z)$$

$$= \frac{\partial}{\partial x}\phi(x,y,z)\,\vec{i} + \frac{\partial}{\partial y}\phi(x,y,z)\,\vec{j} + \frac{\partial}{\partial z}\phi(x,y,z)\,\vec{k} \quad (0.5)$$

$$\phi = x^2y + 2y^2z^3$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\phi(x,y,z) = 2xy \quad (0.5)$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\phi(x,y,z) = x^2 + 4yz^3 \quad (0.5)$$

$$\frac{\partial}{\partial z}\phi(x,y,z) = 6y^2z^2 \quad (0.5)$$

$$\overrightarrow{grad}\,\phi(x,y,z) = 2xy\,\vec{i} + (x^2 + 4yz^3)\,\vec{j} + 6y^2z^2\,\vec{k}$$

$$au\ point\ (1,0,0): \overrightarrow{grad}\ \phi(x,y,z) = \vec{j} \quad (0.5)$$

- $div\,\vec{A} = \vec{\nabla}.\vec{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$ (0.5)

$$\vec{A} = 2xyz\vec{i} + (2x^2 - y)\vec{j} - yz^2\vec{k}$$

$$A_x = 2xyz, \quad A_y = (2x^2 - y), \quad A_z = -yz^2$$

0.5 0.5 (0.5)

$$\frac{\partial A_x}{\partial x} = 2yz, \quad \frac{\partial A_y}{\partial y} = -1, \quad \frac{\partial A_z}{\partial z} = -2yz$$

$$div\,\vec{A} = 2yz - 1 - 2yz = -1 \quad (0.5)$$

- $\overrightarrow{Rot}\,\vec{A} = \vec{\nabla} \wedge \vec{A} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ A_x & A_y & A_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 2xyz & (2x^2 - y) & -yz^2 \end{vmatrix}$

$$\vec{\imath}\begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ (2x^2-y) & -yz^2 \end{vmatrix} - \vec{\jmath}\begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 2xyz & -yz^2 \end{vmatrix} + \vec{k}\begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} \\ 2xyz & (2x^2-y) \end{vmatrix}$$

$$= \left(\frac{\partial}{\partial y}(-yz^2) - \frac{\partial}{\partial z}(2x^2-y)\right)\vec{\imath} - \left(\frac{\partial}{\partial x}(-yz^2) - \frac{\partial}{\partial z}(2xyz)\right)\vec{\jmath}$$

(0.5) (0.5)

(0.5)

$$+\left(\frac{\partial}{\partial x}(2x^2-y) - \frac{\partial}{\partial y}(2xyz)\right)\vec{k}$$

$$\overrightarrow{Rot}\,\vec{A} = (-z^2-0)\vec{\imath} - (0-2xy)\vec{\jmath} + (4x-2xz)\vec{k}$$

$$\overrightarrow{Rot}\,\vec{A} = (-z^2)\vec{\imath} - (2xy)\vec{\jmath} + (4x-2xz)\vec{k}$$

au point (1,0,0): $\overrightarrow{Rot}\,\vec{A} = 4\,\vec{k}$ (0.5)

Exercice2 (7pts)

1° Forme intégrale du théorème de Gauss

Le champ $\vec{E}$ se déduit du potentiel par

$$\vec{E} = -\overrightarrow{\text{grad}}\,V(r), \quad (1)$$

soit ici

$$E_r = -\frac{dV}{dr} = -\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{d}{dr}\frac{e^{-\frac{r}{a}}}{r}$$

$$E_r = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{a+r}{ar^2}e^{-\frac{r}{a}}. \quad (1.5)$$

La forme intégrale du théorème de Gauss

$$\Phi = \int_S \vec{E}.\overrightarrow{dS} = \frac{Q_i}{\varepsilon_0},$$

appliquée à une sphère de rayon r, donne

$$4\pi r^2 E(r) = \frac{Q_i(r)}{\varepsilon_0}. \quad (1)$$

D'où l'expression de la charge $Q_i(r)$ contenue à l'intérieur d'une sphère de rayon r :

$$Q_i(r) = q\left(1 + \frac{r}{a}\right)e^{-\frac{r}{a}}. \quad (1.5)$$

Pour r très petit, $r \to 0$, $e^{-\frac{r}{a}} \to 1$ et $Q_i(0) = +q$. (1)
Pour r très grand, $r \to \infty$ et $Q_i(r) \to 0$. (1)

Exercice 3(8pts)

a- La fréquence de l'onde :

$$f = \frac{c}{\lambda} \quad (0.25)$$

$$f = 0.5 \times 10^{15} Hz \quad (0.25)$$

b- Dans le domaine de rayonnement visible. (1)

c- la valeur numérique de k :

$$k = \frac{\omega}{c} = \frac{2\pi f}{c} \quad (025)$$

$$k = 1.047 \times 10^7 m^{-1} \quad (0.25)$$

d- l'équation cartésienne du plan d'onde :

$$\vec{k}.\vec{r} = \frac{k}{3}(2x + 2y + z) \quad (0.5)$$

e- Exprimer E_y en fonction de E_x :

$$div\vec{E} = \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} = 0 \quad (0.5)$$

$$i\frac{2}{3}kE_0 e^{\left[i\left(\frac{k}{3}(2x+2y+z)-\omega t\right)\right]} + \frac{\partial E_y}{\partial y} = 0 \quad (0.5)$$

Après intégration, on trouve :

$$E_y = -E_x \quad (0.5)$$

f- Le champ magnétique :

$$\overrightarrow{rot}(\vec{E}) = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (0.5)$$

$$\overrightarrow{rot}(\vec{E}) = \begin{vmatrix} \vec{u}_x & \vec{u}_y & \vec{u}_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ E_0 e^{\left[i\left(\frac{k}{3}(2x+2y+z)-\omega t\right)\right]} & -E_0 e^{\left[i\left(\frac{k}{3}(2x+2y+z)-\omega t\right)\right]} & 0 \end{vmatrix} \quad (0.5)$$

$$= i\frac{k}{3}E_0 e^{\left[i\left(\frac{k}{3}(2x+2y+z)-\omega t\right)\right]}\vec{u}_x + i\frac{k}{3}E_0 e^{\left[i\left(\frac{k}{3}(2x+2y+z)-\omega t\right)\right]}\vec{u}_y$$

(0.5) (0.5)

$$-i\frac{4k}{3}E_0 e^{\left[i\left(\frac{k}{3}(2x+2y+z)-\omega t\right)\right]}\vec{u}_z \quad (0.5)$$

$$\begin{cases} -\frac{\partial B_x}{\partial t} = i\frac{k}{3}E_0 e^{\left[i\left(\frac{k}{3}(2x+2y+z)-\omega t\right)\right]} & (0.25) \\ -\frac{\partial B_y}{\partial t} = i\frac{k}{3}E_0 e^{\left[i\left(\frac{k}{3}(2x+2y+z)-\omega t\right)\right]} & (0.25) \\ -\frac{\partial B_z}{\partial t} = -i\frac{4k}{3}E_0 e^{\left[i\left(\frac{k}{3}(2x+2y+z)-\omega t\right)\right]} & (0.25) \end{cases}$$

$$\begin{cases} B_x = -\dfrac{k}{3\omega} E_0 e^{\left[i\left(\frac{k}{3}(2x+2y+z)-\omega t\right)\right]} & (0.25) \\ B_y = -\dfrac{k}{3\omega} E_0 e^{\left[i\left(\frac{k}{3}(2x+2y+z)-\omega t\right)\right]} & (0.25) \\ B_z = \dfrac{4k}{3\omega} E_0 e^{\left[i\left(\frac{k}{3}(2x+2y+z)-\omega t\right)\right]} & (0.25) \end{cases}$$