Université Abbès Laghrour, Khenchela
Faculté des sciences et de la technologie
Département Génie Electrique
Master 1 AII

Le 24/05/2025

Examen S2 : Systèmes non linéaires

Exercice1 (08 points):

1. On considère le système différentiel suivant

$$\dot{x}_1 = -x_1 + x_2$$

$$\dot{x}_2 = -x_1 - x_2 + x_1^2 x_2$$

1.a) Trouvez tous les points d'équilibre et déterminez le type de chacun

1.b) Esquissez approximativement le plan de phase de chaque point d'équilibre.

Exercice 2 : (06 points)

Soit le système suivant:

$$\dot{x}_1 = -3x_1 + x_1^3 - x_2 + u$$

$$\dot{x}_2 = x_1 - bx_2$$

1- Lorsque $u = 0 \; et \; b = 1$ Calculer les points d'équilibre de ce système.
2- Lorsque $u = 0 \; et \; b = 0$, prouver que l'origine est localement stable, en utilisant la fonction de Lypunov suivante : $V(x) = \frac{1}{2}(x_1^2 + x_2^2)$.
3- Lorsque $u = f(x) \; et \; b = 1$, calculer u pour que le système soit stable ?

Exercice 3 (6 points) :

Considérer le système suivant :

$$\dot{x}_1 = 2x_1 - x_2 + u$$

$$\dot{x}_2 = x_1$$

- Concevoir un contrôleur par mode de glissement tel que l'on puisse montrer que l'origine est globalement asymptotiquement stable ?

Université Abbès Laghrour, Khenchela
Faculté des sciences et de la technologie
Département Génie Electrique
Master 1 AII

Le 24/05/2025

Correction Examen S2 : Systèmes non linéaires

Correction exercice 1 (08 points):

a- Les points d'équilibre :

$$0 = -x_1 + x_2$$
$$0 = -x_1 - x_2 + x_1^2 x_2$$

0.25pt

On obtient :

$$x_1 = x_2$$
$$-x_1 - x_2 + x_1^2 x_1 = 0$$
$$x_1^3 - 2x_1 = 0$$

0.25pt

Cette équation a 3 solutions :

$$x_1 = 0$$
$$x_1 = \sqrt{2}$$
$$x_1 = -\sqrt{2}$$

0.25p

Donc nous avons 3 points d'équilibre

$$x_{e1} = (0,0), x_{e2} = (\sqrt{2}, \sqrt{2}), x_{e3} = (-\sqrt{2}, -\sqrt{2})$$

0.25pt

La nature des points d'équilibres :

$$A = \begin{bmatrix} \frac{\partial \dot{x}_1}{\partial x_1} & \frac{\partial \dot{x}_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial \dot{x}_2}{\partial x_1} & \frac{\partial \dot{x}_2}{\partial x_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -1 + 2x_1 x_2 & -1 + x_1^2 \end{bmatrix}$$

1pt

Pour le point d'équilibre $x_{e1} = (0,0)$

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \Rightarrow (\lambda I - A) = \begin{bmatrix} \lambda + 1 & -1 \\ 1 & \lambda + 1 \end{bmatrix} = (\lambda + 1)^2 + 1$$

0.5pt

Les valeurs propres : $\lambda_{1,2} = -1 \pm j \Rightarrow$ Le point d'équilibre est un foyer stable

0.5pt

Pour le point d'équilibre $x_{e2} = (\sqrt{2}, \sqrt{2})$

0.5pt

0.5pt

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow (\lambda I - A) = \begin{bmatrix} \lambda + 1 & -1 \\ -3 & \lambda - 1 \end{bmatrix} = (\lambda + 1)(\lambda - 1) - 3$$

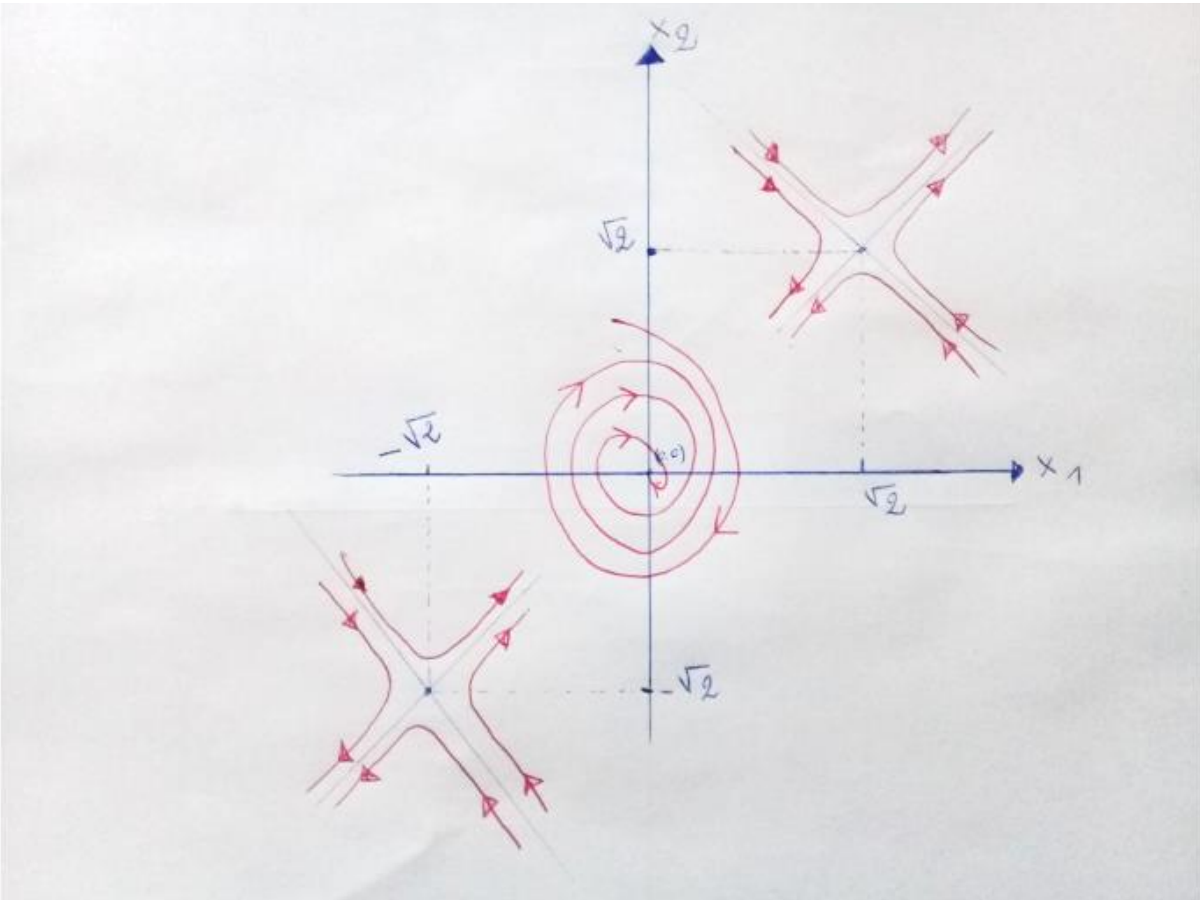
Les valeurs propres :$\lambda_{1,2} = \pm 2 \Rightarrow$ Le point d'équilibre est un point selle

Pour le point d'équilibre $x_{e2} = \left(-\sqrt{2}, -\sqrt{2}\right)$

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow (\lambda I - A) = \begin{bmatrix} \lambda + 1 & -1 \\ -3 & \lambda - 1 \end{bmatrix} = (\lambda + 1)(\lambda - 1) - 3$$ 0.5p

Les valeurs propres :$\lambda_{1,2} = \pm 2 \Rightarrow$ Le point d'équilibre est un point selle 0.5p

b) Esquissez approximativement le plan de phase de chaque point d'équilibre.



3pt

Correction Exercice 2 : (06 points)

Soit le système suivant:

$$\dot{x}_1 = -3x_1 + x_1^3 - x_2 + u$$

$$\dot{x}_2 = x_1 - bx_2$$

1- Lorsque $u = 0$ et $b = 1$ Calculer les points d'équilibre de ce système.

2- Lorsque $u = 0$ et $b = 0$, prouver que l'origine est localement stable, en utilisant la fonction de Lypunov suivante : $V(x) = \frac{1}{2}(x_1^2 + x_2^2)$.

3- Lorsque $u = f(x)$ et $b = 1$, calculer u pour que le système soit stable ?

1-Lorsque $u = 0$ et $b = 1$ Calculer les points d'équilibre de ce système.

Les points d'équilibre :

$$0 = -3x_1 + x_1^3 - x_2$$ 0.5pt

$$0 = x_1 - x_2$$

On obtient :

$$x_1 = x_2$$
$$-4x_1 + x_1^3 = 0$$ 0.5pt

Cette équation a 3 solutions :

$$x_1 = 0$$
$$x_1 = 2$$
$$x_1 = -2$$ 0.5pt

Donc nous avons 3 points d'équilibre

$$x_{e1} = (0,0), x_{e2} = (2,2), x_{e3} = (-2,-2)$$ 0.5pt

1. Lorsque $u = 0$ et $b = 0$, prouver que l'origine est localement stable, en utilisant la fonction de Lypunov suivante : $V(x) = \frac{1}{2}(x_1^2 + x_2^2)$.

$$\dot{V}(x) = \dot{x}_1 x_1 + \dot{x}_2 x_2 = (-3x_1 + x_1^3 - x_2)x_1 + x_1 x_2$$
$$= -3x_1^2 + x_1^4 - x_1 x_2 + x_1 x_2$$ 1pt
$$= -3x_1^2 + x_1^4$$

Pour que $\dot{V}(x) < 0$,il faut que $|x| < \sqrt{3}$ ce qui implique que l'origine est localement stable. 1pt

3. Lorsque $u = f(x)$ et $b = 1$, calculer u pour que le système soit stable ?

$$\dot{V}(x) = \dot{x}_1 x_1 + \dot{x}_2 x_2 = (-3x_1 + x_1^3 - x_2 + u)x_1 + (x_1 - x_2)x_2$$

$$= -3x_1^2 + x_1^4 - x_1 x_2 + u x_1 + x_1 x_2 - x_2^2$$ 1pt

$$= -3x_1^2 - x_2^2 + (x_1^3 + u)x_1$$

pour que le système soit stable il faut que $u = -x_1^3$ 1pt

Correction Exercice 3 (6 points) :

Considérer le système suivant :

$$\dot{x} = f(x) + g(x)u$$

$f(x) = \begin{bmatrix} 2x_1 - x_2 \\ x_1 \end{bmatrix}$, $g(x) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$

Nous choisissons une surface de glissement qui aura pour équation $(x) = c_1 x_1 + c_2 x_2$, tels que c_1 et c_2 sont les coefficients stables de polynôme,

1pt

Par exemple nous choisissons $c_1 = c_2 = 1$

On calcule la commande par mode de glissement comme la somme de deux commandes $u = u_n + u_{eq}$

- La commande discontinue $u_n = -K \times signe\left(s(x)\right)$ 1pt
- La commande équivalente obtenue en posant $\dot{s}(x) = 0$

$$u = \frac{c^T f(x)}{c^T g(x)} - Ksign\left(s(x)\right) = \frac{2x_1 - x_2 + x_1}{1} - Ksign(x_1 + x_2)$$
$$= -3x_1 + x_2 - sign(x_1 + x_2)$$

1.5pt

On calcule alors u_{eq} en posant $u = u_{eq}$ dans l'équation du système, on calcule $\dot{s}(x) = 0$ et on déduit u_{eq}

$$\dot{s}\,(x) = \dot{x}_1 + \dot{x}_2 = 2x_1 - x_2 + u_{eq} + x_1 = 0 \Rightarrow u_{eq} = -3x_1 + x_2 = -4x_1$$

2pt

Le système devient :

$$\dot{x}_1 = 2x_1 - x_2 + u_{eq} = -3x_1$$

$$\dot{x}_2 = x_1 = -x_2$$

0.5pt

Par conséquent, sur la surface de glissement, la solution s'approche de l'origine