Contrôle de " Physique Atomique2 " - Durant 1H30

(13p) Exercice N°01:

L'équation aux valeurs propres du hamiltonien des Alcalins s'écrit :

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2\mu} \Delta - \frac{A}{r} + \frac{B}{r^2} \right] \psi(r, \theta, \phi) = E \psi(r, \theta, \phi) \quad , A, B > 0.$$

1- Lorsqu'on met $\psi(r, \theta, \phi) = R(r)Y(\theta, \phi)$, montrer que:

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{2\mu}{\hbar^2} \left(E + \frac{A}{r} \right) - \frac{1}{r^2} \left(\lambda^2 + \frac{2\mu}{\hbar^2} B \right) \right] R(r) = 0, \quad \left[\frac{L^2}{\hbar^2} - \lambda^2 \right] Y(\theta, \phi) = 0, \quad \lambda^2 \text{ est une cte de séparation}$$

2- Si on pose $Y(\theta, \phi) = T(\theta)F(\phi)$, montrer que :

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \frac{1}{\tan \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} + \lambda^2 - \frac{m^2}{\sin^2 \theta} \right] T(\theta) = 0, \quad \left[\frac{\partial^2}{\partial \phi^2} + m^2 \right] F(\phi) = 0, \quad m^2 \text{ est une cte de séparation}$$

3- Lorsqu'on met $\lambda^2 = l(l+1)$, $-l \leq m \leq +l$, où l est un entier positif et $u = \cos \theta$, déduire la solution $T(\theta)$?

4- Pour l'atome d'hydrogène, on donne : $E_{n,l} = \frac{-\mu A^2}{2\hbar^2 (n+l+1)^2}$ déduire les valeurs explicites des niveaux d'énergie du système précédent ?

On donne : $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial}{\partial r} - \frac{L^2}{\hbar^2 r^2}$, $L^2 = -\hbar^2 \left(\frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \frac{1}{\tan \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} \right)$

l'éq de polynôme associé de Legendre : $\left((1-z^2) \frac{\partial^2}{\partial z^2} - 2z \frac{\partial}{\partial z} + l(l+1) - \frac{m^2}{1-z^2} \right) P_l^m(z) = 0$

Exercice N°02: Choisir une réponse parmi celles préposées pour chaque question

1- L'expérience de Franck et Hertz explique:

A : Résonance optique B : Diffraction des électrons C : Niveaux d'énergies

2- L'expression de l'Hamiltonien $H = \left[\frac{p^2}{2m} - \frac{4ke^2}{r} \right]$ décrit :

A : Be_4 B : Be_4^{+1} C : Be_4^{+2} D : Be_4^{+3}

3- L'effet de Zeeman normal lève la dégénérescence :

A : Partiellement B : Totalement C : Aucune

4- La règle de sélection $\Delta l = \pm 1$ et $\Delta m_l = +1$ est donnée par la condition :

A : $\langle a | P_- | b \rangle \neq 0$ B : $\langle a | P_+ | b \rangle \neq 0$ C : $\langle a | P_x | b \rangle \neq 0$ D : $\langle a | P_z | b \rangle \neq 0$

5- Lorsqu'on utilise les formules : $P_- = P_x - iP_y$, $Y_1^{-1}(\theta, \phi) = \sqrt{\frac{3}{8\pi}} \sin \theta e^{-i\phi}$ et l'opérateur

$\vec{P} = -|q|\vec{r}$ en coordonnées sphériques, l'expression de l'opérateur P_- est donnée par :

A : $-|q|r \sqrt{\frac{8\pi}{3}} Y_1^{-1}(\theta, \phi)$ B : $|q|r \sqrt{\frac{4\pi}{3}} Y_1^{-1}(\theta, \phi)$ C : $|q|r \sqrt{\frac{8\pi}{3}} Y_1^{-1}(\theta, \phi)$

Correction de Contrôle phys atomique 2024-2025

Exercice 1

1) on pose: $\psi(r, \theta, \varphi) = R(r) Y(\theta, \varphi)$

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial}{\partial r} - \frac{l(l+1)}{r^2} + \frac{2\mu}{\hbar^2} \left(E + \frac{A}{r} - \frac{B}{r^2} \right) \right] R(r) = 0$$

$$Y(\theta, \varphi) \left[\frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \frac{2}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{2\mu}{\hbar^2} \left(E + \frac{A}{r} - \frac{B}{r^2} \right) \right] R(r) = 0$$

$$R(r) \frac{L^2}{\hbar^2} Y(\theta, \varphi) = \lambda^2 R(r)$$

$$\frac{1}{R(r)} \left[\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial}{\partial r} - \frac{l(l+1)}{r^2} + \frac{2\mu}{\hbar^2} \left(E + \frac{A}{r} - \frac{B}{r^2} \right) \right] R(r) = \lambda^2$$

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{2\mu}{\hbar^2} \left(E + \frac{A}{r} \right) - \frac{1}{r^2} \left(\lambda^2 + \frac{2\mu B}{\hbar^2} \right) \right] R(r) = 0$$

$$\left(\frac{L^2}{\hbar^2} - \lambda^2 \right) Y(\theta, \varphi) = 0$$

on pose: $Y(\theta, \varphi) = T(\theta) F(\varphi)$

$$\left[- \left(\frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \right) - \lambda^2 \right] T F = 0$$

$$\sin^2 \theta \left(\frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} + \lambda^2 \right) T(\theta) = m^2 T(\theta)$$

$$\frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} F = -m^2 F$$

$$\left[\left(\frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} + \lambda^2 - \frac{m^2}{\sin^2 \theta} \right) T(\theta) = 0 \right]$$

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} + m^2 \right) F(\varphi) = 0$$

3) Transformation met. $u = \cos \theta \Rightarrow du = -\sin \theta d\theta$

$$\frac{dT}{d\theta} = - (1-u^2)^{-1/2} \frac{dT}{du}$$

$$\frac{d^2 T}{d\theta^2} = (1-u^2)^{-3/2} \frac{d^2 T}{du^2} - \frac{u}{1-u^2} \frac{dT}{du}$$

$$\Rightarrow (1-u^2) \frac{d^2 T}{du^2} - 2u \frac{dT}{du} + \left(P(l, m) - \frac{m^2}{1-u^2} \right) T(u) = 0$$

Donc: $T(u) = C \cdot P_l^m(u)$

$$\Rightarrow T(\theta) = C \cdot P_l^m(\cos \theta)$$

4) on a: $E_{n,l} = \frac{-\mu A^2}{2\hbar^2 (n+l+1)^2}$

$$\left(\frac{d^2}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{d}{dr} - \frac{l(l+1)}{r^2} + \frac{2\mu}{\hbar^2} \left(E + \frac{A}{r} \right) \right) R(r) = 0$$

on pose: $l'(l'+1) = l(l+1) + \frac{2\mu B}{\hbar^2}$

$$\Rightarrow \Delta = 1 + 4l(l+1) + \frac{8\mu B}{\hbar^2}$$

$$= (2l+1)^2 + \frac{8\mu B}{\hbar^2}$$

$$\Rightarrow l' = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{(2l+1)^2 + \frac{8\mu B}{\hbar^2}}$$

Donc: $E_{n,l} = \frac{-\mu A^2}{2\hbar^2 \left(n + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{(2l+1)^2 + \frac{8\mu B}{\hbar^2}} \right)^2}$

Exo 2

- 1 $\rightarrow$ p.c. niveau d'énergie
- 2 $\rightarrow$ $D_s B e^3$
- 3 $\rightarrow$ A: partiellement
- 4 $\rightarrow$ B: $\langle a | P_+ | b \rangle \neq 0$
- 5 $\rightarrow$ A: $-|a\rangle \langle a| + \frac{\sqrt{3}}{3} Y_{1,1}(\theta, \varphi)$